

Descubrimos, comprendemos y hacemos matemáticas.

Diálogos en el aula

Línea de investigación

Educación Matemática

Abril /2013

CONTENIDO

	<i>página</i>
1. Introducción	3
2. Justificación	4
3. Propósitos	10
4. Fundamentación	11
5. Metodología	13
6. Esquema de trabajo	15
7. Productos	
8. Recursos	16
9. Referencias	16
10. Cronograma	20

1. Introducción

Schoenfeld (1998) y otros autores señalan que la interdependencia de los propósitos y concepciones del profesor son decisivas en el proceso de enseñanza e impactan directamente el aprendizaje de los conceptos en general y en particular en matemáticas. En esta afirmación probablemente está la justificación del deficiente desempeño que tienen los estudiantes de nuestro país en las evaluaciones, tanto nacionales (EXCALE, ENLACE) como internacionales (PISA); es decir, probablemente su desempeño es consecuencia de los propósitos y concepciones de sus profesores, las cuales desde hace algunos años son objetos de investigación en educación matemática con la finalidad de entender su impacto en la construcción de los conceptos matemáticos (Philipp, 2007). A partir de esos diagnósticos se han diseñado programas que se enfocan en la corrección de algunos errores que exhiben algunos profesores en relación a ciertos conceptos matemáticos (Cohen, 2004, Díaz & Rivera, 2012). Desafortunadamente son pocos los productos de investigación que intervienen en el aula.

En lo personal, los cursos y talleres que desde hace mucho tiempo y con frecuencia dirijo a profesores del nivel básico y bachillerato, me han permitido explorar sus creencias y conocimientos, las cuales después de analizarlas me han permitido descubrir algunas dificultades, limitaciones y en ocasiones errores conceptuales que tienen en la comprensión de los conceptos que les corresponde construir en sus estudiantes. Esta situación impacta de manera directa en los niveles de calidad que se alcanzan en la educación mexicana. El fenómeno hasta cierto punto es justificable si consideremos, que los profesores son víctimas de los deficientes programas de formación y actualización en nuestro país.

El conocimiento matemático y pedagógico es imprescindible en el docente, influyen de manera importante en los aprendizajes de los estudiantes, y en el caso de la educación matemática tiene que ver con el desarrollo de la competencia matemática y el pensamiento matemático en los niños. Para garantizar su posesión, el profesor requiere de acciones dirigidas a su profesionalización, las cuales incidirán consecuentemente en su acción docente, evitarán la reproducción de errores conceptuales en los estudiantes y contribuirán a: la formación de valores, la construcción de actitudes y el desarrollo de procesos de

pensamiento; los cuales indudablemente modificarán favorablemente su visión de la matemática y del mundo.

En el diseño de las acciones concretas orientadas a la profesionalización del profesor debe tomarse en cuenta los resultados que en la investigación en la educación matemática se han conseguido, esto permitirá diseñar y conducir propuestas novedosas, esperanzadoras y eficientes. Este reto debe ser asumido por las instituciones encargadas de la formación del docente, lo cual involucra directamente a la Universidad Pedagógica, asumir el reto es inevitable y, debe ser considerado como una oportunidad de participación directa en la definición del futuro de la educación en México.

Nosotros, desde nuestra formación profesional y la experiencia acumulada en: la docencia en los distintos niveles educativos, en la investigación en la educación matemática (cfr. **Artículos**), la participación en foros nacionales e internacionales en los que se presentan y discuten los resultados más actuales de la investigación en la educación matemática (), la participación en proyectos editoriales (**Libros de texto**), así como la experiencia ganada en el terreno del diseño y conducción de distintos proyectos relacionados con la educación matemática dirigidos a la formación () o actualización de profesores () nos dan elementos que nos permite participar de manera activa en el diseño de los proyectos mencionados.

La propuesta que aquí presentamos: “*Descubrimos, comprendemos y hacemos matemáticas. Diálogos en el aula*” la construimos con la perspectiva mencionada y tomando como situaciones problemáticas las contenidas en los libros de texto de matemáticas de educación primaria, situaciones con las que el profesor de matemáticas debe trabajar directamente y que por su alta demanda conceptual requieren de tratamientos didácticos y conceptuales claros; que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático y la competencia matemática del profesor para llegar al conocimiento y descubrir procesos de razonamiento útiles no sólo en situaciones matemáticas escolares sino aplicables en un espectro más amplio de situaciones cotidianas.

2. Justificación

Al revisar los programas de matemáticas de educación básica de los años sesentas y setentas de nuestro país percibimos la inclinación a desarrollar en el alumno habilidades,

destrezas y el uso mecanizado de las reglas y técnicas. Estas ideas, consecuencia de las corrientes que en la primera mitad del siglo pasado se generaron en la educación matemática a nivel internacional no han perdido vigencia, de hecho están explícitas en los documentos que norman la educación matemática en casi todos los países como *The Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) o *The Programme for International Student Assessment* (OECD, 2002). Estas ideas también se subrayan en lo que se denomina *Competencia matemática (Mathematical Literacy)*.

El desarrollo en los estudiantes de técnicas, habilidades y destrezas es incuestionable, es necesario promover; sin embargo en la educación matemática lo anterior no es suficiente si pretendemos que construyan procesos de comprensión de los conceptos o hechos matemáticos que subyacen en tales técnicas y más allá, procesos de pensamiento correcto. La enseñanza de las matemáticas que omite la reflexión y concentra sus esfuerzos únicamente en la memorización y mecanización acota el aprendizaje de los estudiantes y se traduce en un aprendizaje sin comprensión. Dos preguntas nos surgen de la reflexión anterior:

¿Dónde se origina la falta de comprensión de los conceptos que manifiestan los estudiantes?

¿Los profesores verdaderamente comprenden los conceptos que les toca construir en el aula?

Antes de dar respuesta a estas complejas preguntas veamos las estrategias que siguieron algunos profesores de cálculo de bachillerato al problema de calcular la derivada de la siguiente función (Díaz, 2011).

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 + 3 & 1 < x \leq \frac{13}{6} \\ 2x - \frac{7}{3} & \frac{13}{6} < x \leq 4 \end{cases}$$

Las respuestas que dieron los profesores se caracterizan por:

- i. Aplicar las reglas de derivación mecánicamente a cada una de las expresiones que componen la función

$$f(x) = x^{1/3} \quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

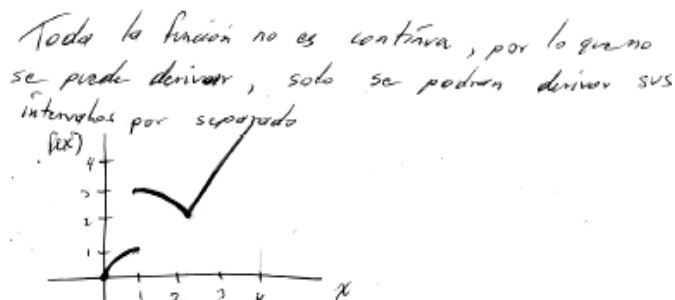
$$f(x) = -(x - \frac{7}{2})^2 + 3 \quad f'(x) = -2(x - \frac{7}{2})$$

$$f(x) = 2x - \frac{7}{3} \quad f'(x) = 2$$

- ii. Enunciar algunos conceptos de cálculo que recuerdan de manera encapsulada, los cuales relacionan sin coherencia y los conducen a conclusiones falsas.

Es una función discontinua y es No se puede derivar.

- iii. Utilizar la percepción visual en los registros gráficos construidos como la única herramienta de conocimiento y con esas desventajas, sin reflexionar obtienen conclusiones incoherentes



Estas situaciones, por cierto convergentes en estos profesores, nos permiten percibir, por un lado la importancia que le asignan a la memorización de hechos o procedimientos como actividad cognitiva para el desarrollo del pensamiento matemático. Por otro lado muestran la importancia que le asignan a los registros gráficos y a la percepción visual para obtener conclusiones, relegando la reflexión y la comprensión sobre las técnicas y sobre los conceptos subyacentes en situaciones como estas; las cuales son abundantes no solo en el contexto de las matemáticas.

¿Sucede lo mismo con el profesor de educación básica?

No olvidemos que el profesor de bachillerato cuenta con cierta formación matemática especializada, a diferencia de la gran mayoría de profesores que laboran en educación básica

¿El profesor del nivel básico comprende realmente los conceptos matemáticos que le toca enseñar?

Un aprendizaje basado únicamente en la memorización es frágil y provoca dificultades en la construcción y uso de los conceptos (Amit & Vinner, 1990). Estas dificultades en ocasiones permanecen pasivas en el sujeto; sin embargo, cuando se activan constituyen verdaderos obstáculos epistemológicos, en el sentido de Brosseau (2002), para el aprendizaje. Obstáculos que el estudiante debe enfrentar y salvar para tener éxito; ya que si esto no ocurre, lo cual es frecuente, los fracasos y frustraciones se integran en la cotidianidad del individuo.

Los obstáculos ligados a las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de los distintos conceptos matemáticos en todos los niveles educativos son tan frecuentes que la investigación en educación matemática ha puesto mucha atención para documentar comprender y, en ocasiones plantear alternativas de solución. En el cálculo diferencial e integral por ejemplo existe una gran producción (Artigue, 1993; Sierpinski, 1992; Kaput & Dubinsky, 1994; Speer *et.al.* 2005; Häikiöniemi, 2006 y Díaz & Rivera, 2012). En la geometría Owens & Outhred (2006) dan cuenta de ello. En el álgebra las investigaciones de Kieran (2006) son significativas. En relación al pensamiento numérico los artículos de Allardice & Ginsburg (1983) y Verschaffel, Greer & Torbeyns (2006) muestran el estado de la situación. Y sobre las dificultades que los alumnos tienen sobre los conocimientos matemáticos en general Otero, *et.al.* (2001) muestran un panorama general de las mismas¹.

Las dificultades que exhiben los estudiantes en la comprensión de los conceptos matemáticos es cierto, pueden atribuirse a distintos factores o elementos que intervienen en el proceso educativo, como por ejemplo los planes y programas; nosotros sin embargo,

¹ Una descripción de lo que sucede en nuestro país al respecto se puede encontrar en *Procesos de Enseñanza y Aprendizaje II* del COMIE y en los Estados del conocimiento del propio COMIE.

desde nuestra experiencia en la docencia y la investigación, creemos como Prenowitz (1951) que algunas de esas dificultades, como en el caso de los conceptos de cálculo, tienen su origen en la complejidad de los conceptos mismos; sin embargo lo anterior no descarta la hipótesis de que uno de los factores que influye también directamente en su origen y que contribuye posteriormente al fortalecimiento de esas dificultades en los estudiantes se encuentra en el aula misma, más específicamente, en la conducción de la clase por el profesor (Lloyd & Wilson, 1998).

Los estudiantes en general requieren del apoyo e instrucción de sus profesores para construir activa o pasivamente sus conceptos. En esta construcción el profesor es pieza fundamental, ya que él es quien organiza el conocimiento, diseña estrategias de aprendizaje, plantea y resuelve problemas. Además de estar obligado a discutir y disertar sobre los conceptos con sus alumnos, comunicar, transmitir la herencia científica y cultural; entre otros muchos temas (Díaz & Rivera, 2012). Ello requiere de la comprensión, del conocimiento y del buen uso del lenguaje. Sin embargo esta competencia parece no tenerla muy desarrollada (D'Amore y Martini, 2000).

Dewey (1916) ya alertaba sobre el impacto nocivo de una enseñanza sin comprensión; señalando que afecta la habilidad del estudiante para reflexionar en el sentido de lo que hace. Al respecto coincide el profesor Freudenthal (1973) quien afirmaba que la persona que enseña debe saber más que el que está aprendiendo y lo debe saber no en el momento en que está realizando la acción de enseñar, sino antes; algunas investigaciones muestran lo contrario, que los profesores de matemáticas tienen una gran deficiencia en el conocimiento de la disciplina (Da Ponte & Chapman, 2000).

Cierto, los contenidos a enseñar en la escuela preexisten en los programas y son parte de la ciencia, que posteriormente mediante transformaciones adaptativas se convierten en saberes para la enseñanza (Chevallard, 2002). Estas transformaciones tienen lugar en cascada en distintos tiempos, lugares y niveles por distintos sujetos hasta llegar a la transformación final que realiza el profesor. Esta situación le delega, al profesor de aula la responsabilidad de los significados e interpretaciones de los conceptos que comunica o construye en los estudiantes. Pero

¿Cuáles son los significados e interpretaciones que asigna el profesor de educación básica a los conceptos matemáticos?

Dewey (1916) añade: el papel del profesor consiste en proporcionar experiencias o actividades relacionadas con la solución de problemas a los estudiantes. La buena comprensión del profesor no solo le permite tener una mejor aproximación al conocimiento, también le permite diseñar situaciones didácticas que promuevan el aprendizaje con comprensión (Brophy, 1991) y nosotros añadimos: le permite identificar correctamente las dificultades de aprendizaje de sus estudiantes. En caso contrario, únicamente repetirá lo memorizado, lo cual muy probablemente provocará en los alumnos frustración. En general esos sentimientos negativos que la gente tiene respecto de las matemáticas lo atribuyen, correcta o incorrectamente, a sus profesores (Boas, 1981).

La preocupación por la comprensión de los sujetos respecto a los conceptos matemáticos ha interesado a diversos sectores de la sociedad y desde mediados del siglo pasado, investigadores en educación matemática y psicólogos se han ocupado de este tema (e.g. Brownell, 1947; Skemp, 1976; Hiebert & Carpenter, 1992; Carpenter & Lehrer, 1999). El profesor Skemp (1980) por ejemplo distingue entre la comprensión relacional y la instrumental. La primera dice, consiste en saber qué hacer y por qué se hace y la segunda consiste en la posesión de reglas y la habilidad para usarlas.

¿El profesor del nivel básico poseerá este tipo de comprensión en el caso de los conceptos que le toca construir en el estudiante?

Al respecto se han realizado varios estudios, uno de ellos está documentado en *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (Fennema & Romberg, 1999), en el que se reportan los resultados de investigaciones relacionadas con la comprensión realizadas en *The National Center for Research in Mathematical Sciences Education* (NCRMSE).

El fenómeno de la comprensión del profesor es muy importante en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y una gran cantidad de investigadores le dedican amplios espacios (*Cfr.* Grouws, 1992; Bishop, *et.al.* 2003; Lester, 2007; ICME 12, 2012) lo mismo que distintas organizaciones se ocupan y hacen énfasis en promoverla en las aulas. The

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) por ejemplo, en el documento *Principles and Standards for School Mathematics* se enuncia como principio de aprendizaje

Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas y construir activamente sus nuevos conocimientos a partir de sus experiencias y sus aprendizajes previos.

y como principio de enseñanza:

Para que la enseñanza sea efectiva los profesores deben conocer y comprender profundamente las matemáticas que a ellos les toca enseñar y ser capaces de recurrir a este conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza....Los profesores deben tener frecuentes y amplias oportunidades y fuentes para mejorar y actualizar su comprensión...Los profesores necesitan saber los distintos significados de los conceptos...Los profesores necesitan conocer las distintas representaciones de los conceptos, las fortalezas y debilidades de las mismas aisladamente y como se relacionan unas con otras

La OECD por su parte en su programa PISA (2000) también enfatiza la comprensión en el desarrollo del pensamiento matemático

La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes saben y necesitan aprender y entonces exigirles y apoyarlos para aprenderlo bien.

Partiendo del principio de promover el aprendizaje con comprensión en nuestros estudiantes, lo cual redundará en elevar la calidad educativa y de país; es necesario e impostergable atenderlo; ello requiere de una enseñanza conducida por verdaderos profesionales de la educación; quienes, entre muchas cualidades deben contar con la comprensión y conocimiento suficiente de los conceptos que les toca construir; que en el caso de los profesores de educación básica en muchos casos está ausente. Ante este vacío nosotros planteamos como alternativa de solución la redacción de una obra con características reales y virtuales, que tiene como

3. Propósitos

- I.** Identificar e integrar una serie de situaciones problemáticas presentes en los libros de texto de matemáticas de educación primaria y de manifiesta dificultad para el profesor de educación básica, que promuevan:
 - i.** El diseño de trayectorias de solución, algunas serán retomadas de las diseñadas por los mismos profesores de educación básica con la intención de mostrar diversas heurísticas y la diversidad de niveles en el pensamiento matemático.
 - ii.** La posibilidad de replanteamientos posibles de las mismas situaciones problemáticas orientados a la atención de aprendizajes especiales.
 - iii.** Reflexiones conceptuales subyacentes en las mismas situaciones y en las trayectorias de solución diseñadas, orientadas a promover la precisión y comprensión de los conceptos.
 - iv.** Reflexiones didácticas, orientadas al reconocimiento de las dificultades inherentes a la construcción de los conceptos.
 - v.** El conocimiento de la disciplina y un cambio actitudinal hacia la misma.

4. Fundamentación

Es para todos nosotros conocida la situación lamentable en que se encuentra actualmente nuestro país. La profunda crisis que le aqueja, en todos los aspectos, es probablemente resultado de lo que sucede en la educación en nuestro país. Para atender este problema se han puesto en operación una gran diversidad de proyectos y recursos, incluyendo los económicos; esperando que a mayor inversión le corresponda proporcionalmente una mejora en el desempeño; sin embargo los resultados muestran que la fórmula no funciona de esa manera. Aquí y en el ahora se puede mirar que esos esfuerzos han sido, si no insuficientes probablemente mal orientados. Aunado a ello tenemos que considerar que otro de los factores que han contribuido al estado actual de la educación en nuestro país es la

deficiencia en los programas de formación y actualización de los profesores de educación básica.

Esta situación obliga, a todo aquel que se considere profesional de la educación y comprometido con su mejoramiento en nuestro país, a pensar en el diseño de nuevas alternativas de intervención en los distintos procesos, sujetos y niveles educativos. Este es un reto inaplazable.

Revisando la literatura encontramos que, en países ubicados en distintas latitudes del planeta como: Japón, Estados Unidos, Alemania y Australia, por citar sólo algunos; una gran cantidad de investigadores como nosotros, orientan su trabajo a la exploración del conocimiento matemático de los profesores de educación básica y/o diseñan propuestas encaminadas al desarrollo profesional de estos profesores; entre las cuales destacan los programas de entrenamiento formales o informales sobre los conceptos matemáticos (Cfr. ICME 12, 2012). Como telón de fondo de estas investigaciones y propuestas está una serie de creencias, concepciones y expectativas que hacen referencia a la profesionalización del profesor de matemáticas (e.g. Noddings, 1992).

En la historia de la Educación Matemática encontramos programas orientados al desarrollo profesional diseñados sobre modelos tradicionales concebidos con el único propósito de transmitir información, proporcionando ideas y entrenamiento a los profesores sobre algunas habilidades y técnicas. Otros programas, a finales del siglo pasado, priorizaron el pensamiento constructivista en las alternativas de profesionalización (Davis, Maher, & Noddings, 1990). Otros más hacen énfasis en la actividad reflexiva. En fin, existe un sinnúmero y diversidad de programas diseñados con el propósito de contribuir al desarrollo profesional del profesor; sin embargo en esta diversidad existe consenso en afirmar que un tema clave sobre el cual debe dirigirse el desarrollo profesional en la educación matemática es el *Aprendizaje de las matemáticas*, entendiéndose por ello el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico. A esta perspectiva Saslavsky, Chapman & Leikin (2003) añaden el término “*Poder educativo*” que conceptualizan como la habilidad de los profesores para seleccionar el conocimiento necesario que le facilite la solución de problemas pedagógicos y matemáticos. Esto último es uno de los elementos en el que sustenta nuestra propuesta.

Con este modelo y aprovechando la amplia gama de actividades de actualización en las que participan los profesores de educación básica, posibilitan el contacto directo con sus creencias y conocimientos; esto último es un espacio potencialmente útil para su exploración, análisis y diseño materiales que contribuyan a la ampliación de la oferta de actualización como para la promoción del aprendizaje con comprensión. En esta dirección se han diseñado algunas obras documentales que aportan a la comprensión y al conocimiento matemático y pedagógico (*Cfr.* Cohen, 2004, Lang, 1985) y es también en esta dirección en la que se orienta nuestra propuesta.

Actualmente el desarrollo del software educativo, la variedad de medios de comunicación virtuales y el incremento en la velocidad de los mismos para comunicarse en tiempo real, aparecen como alternativas novedosas para desarrollar programas de profesionalización de los profesores, algunos, como lo enfatizan Rivera, García y Díaz (2013), án orientados hacia la comprensión de los conceptos. En esta orientación encuentra el sustento tecnológico nuestra propuesta.

5. Metodología

La metodología que nosotros nos proponemos seguir consiste de las siguientes:

Etapas

I. Diagnóstico

- i. Identificación en los libros de texto de matemáticas de educación básica de las situaciones problemáticas en las que tienen dificultades el profesor de este nivel.

II. Exploración

- i. Recuperación de distintas trayectorias de solución diseñadas por profesores de educación básica dadas a las situaciones problemáticas identificadas en la fase de diagnóstico
- ii. Identificación de distintas heurísticas exhibidas en las trayectorias de solución de los profesores

III. Redacción y Diseño

La redacción y diseño de la obra se apegarán estrictamente a las normas editoriales, de estilo y gramaticales; como las siguientes:

- i. El texto total será **escrito en Latex**.
- ii. La **extensión** de los capítulos del libro se determinará de acuerdo a la temática abordada. Las páginas estarán numeradas en la parte superior derecha, escrito en hojas tamaño carta a espacio y medio, en letra Times New Roman de 12 puntos. Las fórmulas serán escritas en Mathtype o similar.
- iii. El **título** del trabajo será breve pero completo, y expresará con claridad el contenido
- iv. La **estructura** de los textos será: introducción, cuerpo del trabajo, conclusiones y bibliografía.
- v. Los **apartados** irán marcados con números arábigos: 1, 1.1, 2, 2.1, 2.1.1. y en el mismo tipo de letra que el resto del trabajo.
- vi. Para las **referencias bibliográficas** dentro del texto se usará la notación APA: primer apellido del autor y año de edición todo entre paréntesis, ejemplo: (Cohen, 2004).
- vii. La **bibliografía** corresponderá únicamente a las citas; se ordenará alfabéticamente y contendrá en este mismo orden: primer apellido e inicial nombre del autor. Año de publicación entre paréntesis. Título del **libro** en cursivas. Ciudad donde se editó. Editorial; ejemplo:

Cohen, S. (2004). *Teachers' Professional Development and the Elementary Mathematics Classroom*. New Jersey. Routledge, Taylor & Francis Group.

Para las acciones inherentes a las etapas de diagnóstico y exploración se hará uso de las siguientes

Técnicas:

- a. Talleres con profesores
- b. Entrevistas no estructuradas
- c. Videgrabaciones

La información recopilada por este medio pasará por un proceso de captura y edición; para posteriormente incorporarla en el diseño de la obra.

6. Esquema de trabajo (probable)

I. Introducción

II. Origen y visión panorámica de este libro

III. Al profesor de Matemáticas.

IV. La matemática escolar y el sujeto escolar

IV.1. La matemática como disciplina formadora en valores

IV.2. La matemática como una ciencia experimental

IV.3. La matemática como disciplina formadora de actitudes

IV.4. La matemática y la construcción del pensamiento crítico

IV.5. La matemática y su utilidad en la cotidianidad del sujeto

IV.6. La importancia de la comprensión de los conceptos en matemáticas en su enseñanza y en su aprendizaje.

V. Algunas situaciones problemáticas su solución y su potencialidad en el desarrollo integral del sujeto

V.1.en los ejes: Sentido Numérico y el Pensamiento Algebraico. Forma, espacio y medida. Tratamiento de la información.

V.1.1. Trayectorias de solución

V.1.2. Heurísticas

V.1.3. Reflexiones conceptuales

V.1.4. Reflexiones didácticas

V.1.5. Precisiones conceptuales

VI. Bibliografía.

7. Productos

I. Artículo

II. Libro

8. Recursos

Este proyecto es posible si la institución proporciona los siguientes recursos:

I. Tecnológicos: Conexiones a la web

II. Materiales: computadora e impresora

III. Humanos (persona de servicio social): auxiliar para la realización de tareas inherentes a la investigación.

IV. Tiempo para la investigación: 12 horas mínimo dedicadas a la realización de la investigación (Algunas o todas estas horas pueden ocuparse eventualmente para la realización de las actividades inherentes fuera de la institución)

V. Económicos:

i. Revistas: Pago de suscripción a alguna revista de investigación en educación matemática con reconocido prestigio.

ii. Congresos: Apoyo de gastos de inscripción y viáticos para la divulgación y difusión de los resultados parciales y totales de la investigación.

9. Referencias

Allardice, B. & Ginsburg, H. (1983). Children's Psychological Difficulties in Mathematics. In Ginsburg, H. (1983). *The Development of Mathematical Thinking*. New York. Academic Press. 319-351.

Amit, M. & Vinner, S. (1990). Some misconceptions in Calculus. Anecdotes or the Tip of an Iceberg? In Booker, G., Cobb, P. & De Mendicuti T. N. (Eds.) *Proceedings of*

- the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Program Committee, Mexico, **1**, 3-10.
- Artigue, M. (1993). Enseignement de L'Analyse et Fonctions de Reference. *Repères IREM. Vol. 11*. 115-139
- Bishop, A. (Ed.). (2003). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.
- Boas, R.P. (1981). Can We Make Mathematics Intelligible? *The American Mathematical Monthly*. **88**(10), 727-731.
- Brophy, J.E. (Ed.) (1991). *Advances in Research on Teaching: Teachers Subject-matter Knowledge and Classroom Instruction V.2*. Greenwich CT. JAI Press.
- Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York. Kluwer Academic Publishers.
- Brownell, W. A. (1947). The place of Meaning in the Teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal*. **47**(5). 256-265.
- Carpenter, T., & Lehrer, R. (1999). Teaching and Learning Mathematics with Understanding. In Fennema, E. & Romberg, T. (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 19-32). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Chevallard, Y. (2002). *La Transposición didáctica, Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina. AIQUE,
- Cohen, S. (2004). *Teachers' Professional Development and the Elementary Mathematics Classroom*. New York. Routledge.
- D'Amore, B. y Martini, B. (2000). Sobre la Preparación teórica de los Maestros de Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. **3**(1). 33-46.
- Da Ponte, J. & O. (2000). Mathematics Teacher's Knowledge and Practices. In Gutierrez, A. & Boero, P. (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotherdam: Sense Publishers. 461-494.
- Davis, R., Maher, C. & Noddings, N. (Eds.). (1990). *Constructivist views on the Teaching and Learning Mathematics*. In Davis, R. [JRME Monograph]. Reston, VA: National Council of Teachers
- Dewey, J. (1916). *Democracy and Education*, USA. The Free Press.
- Díaz, M. (2011). *La Comprensión de la derivada y sus significados. El caso de los profesores de cálculo*. Tesis doctoral. CINVESTAV. IPN.
- Díaz, M. & Rivera, A. (2012). Understanding of the Derivative and its Meanings. The Case of Calculus Professors. In *Proceedings of 12th International Congress of Mathematics Education*. Seoul. Korea. 2862-2870.
- Fennema, E., & Romberg, T. (Eds.). (1999). *Mathematics Classrooms that Promote Understanding*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Freudenthal, H. (Ed.). (1973). *Mathematics as an Education Task*. Dordrecht. Reidel.
- Grouws, D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Co.
- Hähkiöniemi, M. (2006). Associative and Reflective Connections Between the Limit of the Difference Quotient and Limiting Process. *Journal of Mathematical Behavior*. **25**(2), 91-184.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In Grouws, A.D. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (p.p. 65-97). New York: Macmillan Publishing Co.
- Kaput, J. Dubinsky, E. (Eds.). (1994). *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning. Preliminary Analyses and Results*. MAA Notes. v. 33 Mathematical Association of America. Washington, DC.
- Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In Gutierrez, A. & Boero, P. (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotherdam: Sense Publishers. 11-50.
- Lang, S. (1985). *The beauty of doing mathematics. Three public dialogues* (1985). New York. Springer Verlag.
- Lester, F. (Ed.). (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. National Council of Teachers of Mathematics. Information Age Publishing Co.
- Lloyd, M. & Wilson, M. (1998). Supporting Innovation; The Impact of a Teacher's Conceptions of Functions on his Implementation of a Reform Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. **29**(3), 248-274.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. USA.
- Noddings, N. (1992). Professionalization and Mathematics Teaching. In: Grouws, A.D. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (p.p. 65-97). New York: Macmillan Publishing Co. 197- 208.
- OECD. (2002). *Programme for International Students Assesment. Sample Task from the PISA 2000 Assesment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*. OECD.
- Otero, M., Fanaro, M. y Elichiribehety, I. (2001). El conocimiento Matemático de los Estudiantes que Ingresan a la Universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. **4**(3). 267-287.
- Owens, K. & Outhred, L. (2006). The Complexity of Learning Geometry and Measurment. In Gutierrez, A. & Boero, P. (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotherdam: Sense Publishers. 83-116.
- Philipp, R. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In. Lester, F. (Ed.). (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. National Council of Teachers of Mathematics. Information Age Publishing Co. 257-318.
- PISA (2000)

- Prenowitz, W. (1951). Insight an Understanding in the Calculus. En Apostol, T., M. (Eds.) *A Century of Calculus*. The Mathematical Association of America. 1992.
- Rivera, A., García, R.M. y Díaz, M. (2013). Comprensión de los Significados de la Derivada: Un Estudio con Profesores de Bachillerato y una Propuesta Didáctica en Ambientes Virtuales. En: Rojano, T. (Coordinadora). *Las Tecnologías Digitales en la Enseñanza de las Matemáticas*. (2013). México. Trillas. 37-68.
- Saslavsky, O., Chapman O. & Leikin, R. (2003). Professional Development in Mathematics Education: Trends and Tasks. In Bishop, A. *et.al.* (2003). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers. 877-918.
- Schoenfeld, A. (1998). Toward a Theory of teaching-in-context. *Issues in Education*. **4**(1), 1-94.
- Sierpinska, A. (1992). *Understanding in Mathematics*. London. Falmer Press.
- Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*. **77**. 20-26.
- Skemp, R. R. (1980). *The Psychology of Learning Mathematics*. England: Penguin Books.
- Speer, N., Strickland, S. & Nicole J. (2005). Teaching assistants' knowledge and beliefs related to student learning of calculus. In Lloyd, G. M. *Et.al.* (Eds.). *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Verschaffel, L., Greer, B. & Torbeyns, J. (2006). Numerical Thinking. In Gutierrez, A. & Boero, P. (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Rotherdam: Sense Publishers. 51-82.

10. Cronograma:

TIEMPOS ACCIONES	2015					2016						
	AGOST.	SEP.	OCT.	NOV.	DIC.	ENE.	FEB.	MAR.	ABR.	MAY.	JUN.	JUL.
Diagnóstico												
Exploración												
Redacción del primer borrador												
Redacción de artículo												
Asistencia a congresos												
Redacción final												
Entrega de informes												